

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

自動車学校の学科試験で、「車は、青信号なら直進、右左折ができる。○か×か」という問題があり、これの答えは「車両には原付も含まれ、原付は二段階右折しないといけないから×」だそうです。ややこしいですね。仮免試験の準備中疲れてしまったあなた。大学数学のクイズを解きたくったそのあなた。大学数学仮免試験で息抜きをして見ませんか。

仮免試験に合わせて50問になりました。基本的に大学学部程度の問題を想定して作るように配慮したつもりですが、一部そこから外れている問題があります。教習所の奇問だと思ってご容赦ください。

間違いの指摘などはotheiio323.com@gmail.comまでお願いします。

問題を提供していただいた5人の皆様ありがとうございました。問題の最後の部分に出題者を掲載していません。時間を測って解いて見るもよし（ちなみに30分制限で40点以上で合格です）、チラチラ眺めて楽しむもよし。それでは、問題のスタートです。

問題：以下の文章が数学的な不備を含んでいれば×、正しければ○せよ。

1. 全てのイデアルが単項生成であるような環において、0でない素イデアルは必ず極大イデアルである。
2. どんな代数閉体も、任意の自然数 n に対して、1の原始 n 乗根を必ず含む。
3. 非可換有限群 G から重複を許して任意に2元を選ぶ（例えば S_3 なら S_3 の6個の要素が書かれたサイコロを二回投げると思う）。その2元が可換である確率は最大でも $5/8$ である。つまり、2つの元の組み全てのうち、67.5%より多くが可換とわかれば、その群はアーベル群と断定して良い。
4. A を環、 M を A 加群とする。 A のジャコブソン根基 J に含まれるあるイデアル I について、 $IM=M$ が成り立つならば、 $M=0$ である。
5. A 加群 M が忠実平坦 (faithfully flat) であることと、忠実かつ平坦 (faithful and flat) であることは同値である。
6. リーマン球面上にはゼロでない大域正則1形式が存在しない。
7. 2つの位相空間 X と Y があり、 X の位相は Y の位相より弱いとする。 X が可分なら、 Y も可分になる。
8. 環 A は必ず A の完備化の部分環である。
9. $x^2 + y^2 = 1$ を満たす $(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ の個数を求めたい (ただし p は奇素数)。
そこで、問題の affine curve の射影閉包をとって考えることにした。
射影閉包 $\{[X : Y : Z] \in P^2 \mid X^2 + Y^2 = Z^2\}$ は P^1 と同型なので、その \mathbb{F}_p 有理点は、 $p^2 - 1/p - 1 = p + 1$ 個あることがわかる。
無限遠点があることに注意すると、求める個数は $p + 1 - 1 = p$ 個である。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

10. 群 G の要素 x, y がともに有限位数のとき、積 xy もまた有限位数となる。
11. 可換群の複素数体上の任意の表現は完全可約である。
12. \mathbb{R} 上の関数が一様連続であれば、リプシッツ連続である。
13. チェイン複体の圏と位相空間の圏は圏同値である。
14. ベクトル空間とは、係数環を体とする加群である。
15. 一億個の素イデアルをもつ単位的可換環が存在する。
16. クルル次元が一億となる単位的可換環が存在する。
17. $\text{Spec}R$ がネーター空間なら、 R はネーター環である
18. 代数閉体は完全体である。
19. 部分体の和集合は体である。
20. 一般にベクトル空間 V は、有限個の真部分空間の和集合にはなりえない。
21. PIDにおいて、素イデアルは極大イデアルである。
22. 代数的整数のなす環 (\mathbb{Z} の \mathbb{C} における整閉包) のクルル次元は1である。
23. 位相空間の間の全単射は同相写像である。
24. 位相空間における数列は加算無限個の収束先を持つこともある。
25. G を (乗法的に書いた) 群とし、 H を指数 n の正規部分群とする。このとき、 H は G^n を含む。
26. \mathbb{Q} の付値環は無限個あるが、有限体の付値環はただ1つしかない。
27. 体はDVRである。
28. 位相空間において、全単射な連続写像が同相写像であるとは限らないが、コンパクトハウスドルフ空間において、全単射な連続写像は同相写像である。
29. p 進数体には全順序が入る。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

30. K を局所体とする。有限次元アーベル拡大 L/K が不分岐であることは、その単数群が拡大のノルム群に含まれることと同値であり、完全分岐であることは、ノルム群が K の素元を含むことと同値である。

32 複素数体は2次拡大を持たない。

33 一般に非特異なaffine curveの射影閉包が非特異とは限らないが、あるワイエルシュトラウス方程式で定義されるaffine curveが非特異であるとき、その射影閉包も非特異である。

34 ネーター環の完備化はネーター環である。

35 R をPIDとする。有限生成 R 加群 A の、指数有限の部分加群 B を考えると、 A と B は R 加群として同じランクを持つ。

36 p を素数とし、 K を完備体とする。 K'/K を完全分岐 p 次巡回拡大とすると、ある自然数 n が存在して、 K の n 次の高次単数群は K' の単数群のノルム群に含まれる。

37. ハウスドルフ空間の商空間はハウスドルフ空間であり、コンパクト空間の商空間はコンパクト空間である。

38. B を環、 A をその部分環とする。 B が A 上に整であるとき、 A が体なら B は体である。

39.

$\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$ とする。なお、 z_1, z_2, z_3 はすべて実数であるとする。

$\vec{Z} \cdot \vec{X} = 0$ をみたす $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ (x_1, x_2, x_3 はすべて実数) の全体、つまり $z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = 0$

をみたす $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ (x_1, x_2, x_3 はすべて実数) の全体は、

$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = 0$, $\vec{y}_1 \neq (0, 0, 0)$, $\vec{y}_2 \neq (0, 0, 0)$ をみたすある特定の $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^3$ について、

ある実数 c_1, c_2 によって $\vec{X} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$ と書けるような \vec{X} の全体と一致する。

(つまり、 $\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$ に対して、そのような $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^3$ が存在する。)

○か×か。

なお、 \mathbb{R} という記号は、実数の全体をあらわす。また、 n が自然数であるとき、 \mathbb{R}^n という記号は、

$(a_1, \dots, a_1, \dots, a_n)$ のように、 n 個の実数を組にしたものの全体をあらわす。(n 「個」と言ったが、もちろん、 $(0, 0, 0)$ のように成分が重複していてもよい。)

40. 位数最小の非可換群の位数は6である。

41. 位数 q の有限体の乗法群は位数 $q-1$ の巡回群である。

42. すべての元の位数が p の冪であるような有限群の位数は p の冪である。

43. 全射群準同型写像は元の位数を保つ。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

- 44.位相空間の（相対位相で）コンパクトな部分空間の共通部分は再びコンパクトな部分空間である。
45. L/K を代数拡大とする。 L は、 L における K の分離閉包上の純非分離拡大である。
- 46.完全分岐ガロア拡大はいつでもアーベル拡大である。
- 47.距離空間において、半径1の開球の閉包は半径1の閉球である。
- 48.無限次元拡大の時は、ガロア対応（ガロア拡大とガロア群の部分群の間に1対1の対応が成り立つ）が成り立たないことがある。
49. R をDVRとする。 $R[X]$ の極大イデアルで $(x^2 + 1)$ を含むものは、 R の素元（極大イデアルの生成元。uniformizerともいう。）を含む。
50. R をDVR, π を R の素元（uniformizer）とする。 $R[x]$ の極大イデアルは π を含む。

出題者（学年は出題当時のもの）

7,10,32 Tさん（B3）

9,11,23 松本さん（M2）

2 喜多さん（B4）

39 春さん（B4）

上記以外 あすごんさん（B3）

解答とコメント（各解答およびコメントは、各問題の出題者によるもの）

1. x

解説： $Z \times Z$ を考えよう。 $0 \times Z$ は元の環を割れば Z になることからわかるようにこの環の素イデアルであるが、極大イデアルではない。

コメント： PID (principal ideal domain) には、全てのイデアルが単項生成であることに加えて、整域であることが課されている。この条件を外すと、PIDにおいて成り立つ性質「(0)でない素イデアルは極大イデアル」なども成り立たなくなる。整域の仮定を外したものを、PIR (pincipal ideal ring) などと呼ぶことがあって、ザリスキーサミュエルの本などに詳しい記述がある。なお、PIRにおいても、「クルル次元が1以下」は成り立つ。これはPIDの場合と違って証明は簡単ではない。PIRは全てのイデアルが単項生成なのでもちろんネーター環であるから、単項イデアル定理（松村p122）が使ってクルル次元は1以下、という説明もできる。

2. x

解説： F_3 (位数3) の有限体の代数閉包を考えよう。この閉体の標数は3だから、1の3乗根とは、 $\zeta^3 - 1 = (\zeta - 1)^3$ より、1以外にありえない。1は原始3乗根ではないから、この体に1の原始3乗根は存在しない。

コメント: 閉体ならn乗根は必ず取れる（一次因子にまで分解するから）のですが、原始n乗根が取れるかな？と思って思いついて考えた問題です。

3. ○

余談： 1つでも非可換な元の組みがあれば非可換群と呼ぶわけだが、逆に、いくつ非可換な組みがあれば、群は可換と断定できるのか？を問う問題である。非可換群と言っても、70パーセントくらいは可換だったりするんですね。

本問の問題文は、スタンフォード大学の大学院入試試験問題から採用しました。

観察

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

まず非可換群で一番位数が小さい S_3 で実験してみよう。ために S_3 の演算表を書いて、可換な組みに○をして数えてみよう。題意の確率はちょうど $1/2$ になっただろうか？

では次に、もう少し位数の大きい非可換を試してみよう。位数8の Q_8 か D_4 で試してみよう。数論好きなら Q_8 を喜んで選ぶだろう。 Q_8 の演算表は書いたことが無い人が多いと思うのでここに書いて見た。

×	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Pinterest:

The multiplication table for the quaternion group. Click for the ..

画像は著作権で保護されている場合があります。詳細

表示

数えてみるとちょうど40個で、 $40/64=5/8$ になった！これはちょうど等号が成立する場合である。 Q_8 の中心は、 $\{\pm 1\}$ である（失礼、上の画像で紫で書いてあるのは間違いである）。そうすると、演算表を縦に、中心に属する元とそうでない元に分けて足して行きたくはなっただろうか？

解説：以下は答案の一例である。

mp. G : 非可換有限群の時

$$P(G) = \frac{|\{(a,b) \in G \times G \mid ab=ba\}|}{|G \times G|} \leq \frac{5}{8}$$

$$|\{(a,b) \in G \times G \mid ab=ba\}|$$

$$= \sum_{a \in G} |Z_G(a)| \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし} \\ Z_G(a) = \{b \in G \mid ab=ba\} \end{array} \right)$$

$$= |Z(G)| |G| + \sum_{a \in G \setminus Z(G)} |Z_G(a)| \quad \left(\begin{array}{l} Z(G) \text{ は} \\ G \text{ の中心} \end{array} \right)$$

$a \notin Z(G)$ のときは $Z_G(a) \neq G$ だから

$$\frac{|G|}{|Z_G(a)|} \geq 2.$$

$$\text{ゆえに, } P(G) = \frac{|Z(G)|}{|G|} + \sum_{a \in G \setminus Z(G)} \frac{1}{|G|} \cdot \frac{|Z_G(a)|}{|G|}$$

$$\leq \frac{|Z(G)|}{|G|} + \sum_{a \in G \setminus Z(G)} \frac{1}{2|G|}$$

$$= \frac{|Z(G)|}{|G|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{|G| - |Z(G)|}{|G|}$$

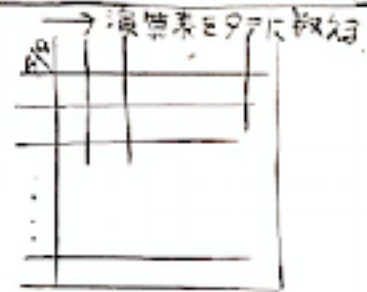
$$= \frac{1}{2} + \frac{|Z(G)|}{2|G|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2|G/Z(G)|}$$

今、 G : 非可換より $|G/Z(G)| > 1$. $|G/Z(G)| = 2, 3$ のとき

$G/Z(G)$ は巡回群. つまり G はアーベル群となり不適。

よって $|G/Z(G)| \geq 4$. よって $P \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ □

なお, 等号は D_4 や Q_8 のとき成り立つ。



4.x

解説: $M = Qp, A = Zp$ とする。このとき A は pZp を極大イデアルとする局所環だから、 $J = pZp$. $I = (p)$ とすると、確かに $IM = I$ が成り立つが、 M は 0 ではない。

コメント: いわゆる中山の補題で、有限生成の条件を抜くと補題の主張が成り立たない反例である。ちなみに、 Qp が Zp 上有限生成と仮定すると中山の補題に反するので、 Qp は Zp 上有限生成でないことがわかる。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

5.x

解説：QはZ上忠実かつ平坦であるが、 $Z/2Z \rightarrow Z/2Z \rightarrow 0$: not exact (真ん中は2倍写像) にZ上Qをテンソルしよう。すると、ゼロ因子を含む環の局所化をしていることになるので、この完全列は(テンソル積の右完全性より) $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ となり、これは完全列である。よって、QはZ上忠実平坦ではない。

コメント: 逆は成り立つ。つまり、忠実かつ平坦な加群は忠実平坦である。

6.○

解説：コンパクトリーマン面上の大域1形式のなすベクトル空間の次元は、その種数と等しい。

7.○

解説: (X, \mathcal{O}_X) 上で, $\exists A \subset X$ かつ $|A| \leq N_0$ かつ $\mathcal{O}_X(A) = X$.

このAの (X, \mathcal{O}_X) 上で $\mathcal{O}_X(A) = X$ であることを,

$\mathcal{O}_X \leq \mathcal{O}_X$ に留意すると示せる

8.x

解説：全体イデアルで完備化すると、0が並ぶ自明な射影系の射影極限になって、完備化は0になってしまい、もとの環は完備化された環の部分環にはなりません。

解説：コメント：局所化の時も、ゼロ因子を含む積閉集合で局所化するとゼロ環になりました。

9. x

pが4で割って1余る素数の時は、mod pでの-1の平方根が2つあるので、 $[1:\pm i:0]$ がこのaffine chartにはない無限遠である(2つある!)。なので、pが4で割って1余る素数の時は、求めるaffine curveのFp有理点の個数はp+1から2を引いてp-1個である。pが4で割って3余る素数の時は、そのままp+1個である。

コメント：射影閉包のFp有理点を求める部分は、射影閉包がP1と同型、という代わりに、合同ゼータ関数を使って(あるいはweil予想の系として)導かれるHasse weil boundを用いても求められます。一般に体K上の種数gのcurveのK有理点の個数をC(K)とすると、 $|C(K) - q - 1|$ は $2g\sqrt{q}$ で抑えられます。題意のcurveは非特異な2次曲線なので、種数は0ですから、Fp有理点はq+1個とわかります。

Prop. p : odd prime

$$\#\{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid x^2 + y^2 = 1\} = \begin{cases} p-1 & p \equiv 1 \pmod{4} \\ p+1 & p \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$$

Proof. \mathbb{F}_p 上の affine curve $C: x^2 + y^2 = 1$ の射影包.

$$\bar{C} = \{[X:Y:Z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

\bar{C} と \mathbb{F}_p は \mathbb{F}_p 上同型.

(*) $\phi: \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\phi = [X+Z, Y]$, $\psi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{C}$ を $\psi = [s^2 - t^2, 2st, s^2 + t^2]$ と定めると ψ は共に射影で、
 $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \text{id}$. check!

とくに, $\#\bar{C}(\mathbb{F}_p) = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = \frac{p^2-1}{p-1} = p+1$.

$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \iff (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \iff p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき.

$\bar{z}^2 = -1$ in \mathbb{F}_p とする $\pm i \in \mathbb{F}_p$ がただ 2 つ存在するので, それらを $\pm i$ とおく.

$Z=0$ とし, $Y = \pm iX$ より, $[X:Y:Z] = [X:\pm iX:0] = [0:\pm i:0]$

より, $\bar{C}(\mathbb{F}_p) = C(\mathbb{F}_p) \cup \{[1:i:0]\} \cup \{[0:-i:0]\}$.

であるから, $\#C(\mathbb{F}_p) = p+1-2 = p-1$. \square

$p \equiv 3 \pmod{4}$ のとき, $\#C(\mathbb{F}_p) = p+1$. \square

参考

- 同様に 種数 g の curve に対し, $|\#\bar{C}(\mathbb{F}_p) - (g+1)| \leq 2g\sqrt{p}$ が成り立ちます (Hasse bound). $g=0$ で $g=p$ とすれば, 本問題の $\#\bar{C}(\mathbb{F}_p) = p+1$ までわかります (非特異な 2-次元射影曲線の genus は 0 です).

①の不等式は, weil 予想の系としてすぐ出てきますが, 個別に証明するのは, 仮えは $g=1$ の場合でも, それなりに準備が必要です.

解説: (反例)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$A^6 = B^6 = E$$

$$AB = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^6 = (-1)^6 \begin{pmatrix} 1 & 2M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq E$$

11. x

解説: 有限群の場合は正しい。実数のなす群の2次元表現で完全可約でないものが存在する。

12. x

$y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) を考えると、有界閉区間 (\mathbb{R} のコンパクト集合) 上の連続関数なので、この関数は一様連続である。しかし、原点付近で傾きは無限大に近づいていき、リプシッツ連続ではない。

13. x

前者には零対象があるが、後者にはない。

14. ○

コメント: 昔の大学の先生の中には、一年生の線形代数の最初の授業で、これをベクトル空間の定義にして進めていた人がいるらしい (都市伝説)。実際、ベクトル空間の公理はたくさんあるように見えるが、最初の4つがアーベル群の公理で、残り3つが加群の作用に関する公理である。こう覚えれば、ベクトル空間の定義も忘れないだろう。

15. ○

解説: 体の一億個の直積を考えれば、素イデアルは1億個ある。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

16.○

解説: K を体とする。一億変数の K 係数多項式環 $K[x_1, x_2, \dots, x_{\text{一億}}]$ はクルル次元が1億である。

17.x

解説: k を体とする。 $k[x_1, x_2, \dots] / (x_1^2, x_2^2, \dots)$ を考えると、これは反例になっている。なお、この反例は、Spec R がザリスキー位相でハウスドルフとなる例にもなっている。

もう少し面白い例を出そう。 \mathbb{C}_p の付値環を考えると、これは例になっている。しかもこの環は被約である。

18.○

解説: 代数閉体なら一次因子の積に分解するので、多項式が分離的になることができないから完全である。

19.x

解説: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 、 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ はともに $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ の部分体だが、 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cup \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を含まないので体ではない。

20.○

コメント: これを使うと、ガロア理論の基本定理を使って原始元定理を示すことができます。

21.x

解説: Z のイデアル 0 は素イデアルだが極大イデアルではない。

コメント: 整数論の人は、デデキント環などに対して、 0 でない素イデアルを素イデアルと呼ぶ習慣がある。なので、わかっている人がこのように発言したとしてそれは慣習の問題なので何も間違いだと言われるほどのものでもない。なので、これは悪問とも言える。

22.○

解説: 整閉包をとってもクルル次元は変わらないので、代数的整数のなす環のクルル次元は1である。

コメント: 代数的整数論というノイキルヒの本がありますが、代数的整数というのはこの環の元のことです。

23.x

解説: 2点以上を含む集合に離散位相と密着位相を入れた場合、それら2つの位相空間は同相でない。

24.○

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

解説：可算無限濃度の集合（ N など）に密着位相を入れた位相空間においては、任意の数列は任意の元に収束する。数列を1つ固定すれば、その数列は可算無限個の収束先をもつ。

25.○

解説： $G \rightarrow G/H$ を射影とする。 G/H は位数 n の群だから、この群の任意の元は n 乗すると単位元になる。 G の任意の元 g に対して、 $g^n \in H$ であることがわかるから、題意は成り立つ。

コメント：局所類体論の簡単な応用で、こんなものがあります。

p を奇素数とする。 \mathbb{Q}_p の $(p+1)$ 次拡大はいくつあるか？

無限個じゃないの？と思うかもしれませんが、 \mathbb{Q} とかの場合はいつもそうでした。ところが、 \mathbb{Q}_p などの局所体を下の体に持ってくると、体拡大の様子は下の体だけで決まってしまうということが起きます。実際、 \mathbb{Q}_p の n 次有限次アーベル拡大は、単数群の指数 n の開部分群と一対一に対応することが局所類体論から従います。ここで、 \mathbb{Q}_p の単数群はこの問題の結果から $(\mathbb{Q}_p^\times)^{\wedge p}$ を含むので、 $\mathbb{Q}_p / (\mathbb{Q}_p)^{\wedge n}$ の部分群の個数を求めればよいことになります。すると、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の指数 p の部分群がいくつあるかを求めればよいことになります。おっと、これは練習問題レベルですね。位数 p の元（ $p^2 - 1$ 個）と位数 p の群が $(p-1) : 1$ に対応するので、 $(p^2 - 1) / (p - 1) = p + 1$ 個になります。

練習 \mathbb{Q}_2 の2次拡大はいくつあるか

答：7つ

解説：今度は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の指数2の部分群の個数を数えることになって、7つあることがわかります。

26.○

解説： $\mathbb{Z}(p)$ は \mathbb{Q} の付値環なので、素数に応じて無限個あります。体の付値環は、体の素点と一対一に対応しますが、有限体の場合はただ1つしかありません。

27:x

DVRとは一次元ネーター正規局所環で、体は0次元なので体はDVRではありません。

僕の知り合いで一番優秀な人が言い間違えていた（「あ、体ってDVRじゃなかった」）のでどうも頭に残っています。

28.○

解説：エピ射かつモノ射なら同型射になるとき、balancedな圏であると言います。位相空間の圏はbalancedではなく、片方が射（連続写像）でbijだからといって、逆写像が射とは限りません。実際、2点集合に離散位相を入れて、そこから2点集合に密着位相を入れた位相空間への恒等写像を考えると、それはbijで連続写像ですが、逆写像は連続にはなりません。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

一方、コンパクトハウスドルフを課せば、逆写像は自動的に連続になります（ \because 閉集合を引き戻してみると、ハウスドルフ空間のコンパクトな部分集合なので閉集合）。つまり、コンパクトハウスドルフ空間の圏はbalancedだと言えます（同様に、たとえば群の圏などもbalancedでした）。

29.x

解説：p進体では、2乗して-1になる数が必ずあります（pが2のときは $\sqrt{-1}$ 、pが奇素数のときは $\sqrt{-1}$ ）。この性質を持つ体には全順序が入らず、順序体にはなりません。この辺りの事情はCと同じです。

30.○

コメント：完全分岐拡大の特徴付けはいくつかありますが、これは特に局所体の拡大の場合の特徴付けで、重要です。

32.○

解説：「環と体とガロア理論」（雪江明彦）補題4.17.3

33.○

解説：一般には、たとえば $C:xy^2-1=0$ はsmooth curveですが、この射影閉包の $Z=1$ でのaffine chartは $y^2=x^3$ で、非特異です。

ただし、affine curveがワイエルシュトラウス方程式Eで与えられるときは、その射影閉包において $Y=1$ のaffine chartを考えると、 $z + a_1xz + a_3z^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz + a_6z^3$. ヤコビライテリアから、元のaffine curve Eが非特異であることを使うと、このaffine curveが非特異であることが、導けます。

34.○

解説：ネーター環はcompletionをとってもネーター環、これはなかなか味わい深い事実です。アティマクの10章は、これの証明を1つのゴールにして書かれています。他にも良い証明はあって、 A の $I = (a_1, 2, \dots, a_n)$ による完備化は、 $A[[X_1, X_2, \dots, X_n]] / (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ と同型になります（証明は少し準備が必要です。松村の完備化の章を参照）。ネーター環係数の冪級数環はネーター環、その剰余環なのでネーター環です。p進整数環をこれで特徴付ける流儀もあります。

35.○

解説：PID上の有限生成加群に関する構造定理から、R加群としてのランクが異なるとすると、AをBで割るとRが残ってしまい、指数無限になってしまいます。なので、ランクは等しいです。

コメント：局所体の単数群を求めるところで最近出てきたので問題にしてみました。局所体のn次高次単数群 U_n は主単数群 U_1 の指数有限の部分加群（一般には有限ではないが、局所体なので剰余体が有限だから！、指数は隣同士の商群の位数の和となって、有限になります）となります。 U_n

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

は形式logが誘導する形式群に付随する群の同型、つまり M^n と $G_m(M^n) = U_n$ の間の同型があるので Z/p^d (d は Q_p から見た局所体 K の拡大次数) と同型になります。 U_n と U_1 はこの問題よりランクが同じなので、あとは U_1 の torsion subgroup がわかればよいことになります。剰余体の位数が p の局所体の極大イデアルに、形式群からの演算を入れた群は、位数は必ず p べきなので、torsion subgroup は $Z/p^a Z$ と同型です (p^a は torsion sub の位数)。こうして、標数 0 の局所体の単数群がわかりました。

36.○

岩澤健吉の「局所類体論」や齊藤秀司の「整数論」(8章)から引用しました。証明は、2つの局所体上のアイゼンシュタイン多項式を構成する作業がメインですが、一番入り組んでいるのはある元が上の体の元に入っているかを確認する部分です。詳しくは上記二冊を参照してください。推進定理などの練習にもちょうど良いです。

37.x

商写像 $X \rightarrow X/\sim$ が連続となるような最強の位相を X/\sim に入れたのが商空間 Z/\sim でした。コンパクト性は連続写像で保たれるので、元の空間がコンパクトなら商空間もコンパクトになります。同様の理由で、連結空間の商空間も、(連続写像で連結性は保たれるので) 連結空間です。

一方、ハウスドルフ性は商をとる操作では保たれません。

反例: $a, b \in R$ に対して、 $a \sim b$ を $a - b \in Q$ で定めると、 \sim は同値関係になります。 R/\sim はハウスドルフ空間ではありません。1点集合 $\{0\}$ の連続写像による引き戻しである Q が、 R の閉集合にはならないからです。

38.x

解説: $k[x]/(x^2)$ は整拡大だが $k[x]/(x^2)$ は体ではない。

39.別紙参照

40.○

解説: S3 です。

41.○

コメント: もっと一般に、「体の乗法群の任意の有限部分群は巡回群」という事実が成り立ち、とても重要です。

たとえば、このことから、体の乗法群への準同型がある時、その像は巡回群、特にアーベル群であることがわかります。作問者はこの結果を、「完全分岐なガロア拡大は可解群である」という事実の証明で最近使いました。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

42.○

解説：群 G の位数が p と互いに素な素因数 a を持つとすると、シローの定理より G には位数が a べきのシロー-sub group H が存在します。 H の単位元でない元は、 p べきの位数を持つはずなので、 H には位数が p べきの巡回部分群 Y が存在します。ラグランジュの定理より Y （位数 p べき）は H （位数 a べき）の約数ということになりますが、 p と a は互いに素なのでこれは矛盾です。

なお、上とほぼ同様にシローの定理から系としてコーシーの定理（有限群 G と G の位数を割り切る素数 p が与えられると、 G には位数 p の元が存在する）を使えば、ただちに問題はわかります。歴史的にはコーシーの定理の方が先に証明されて、あとでシローの定理に進化したらしいです。

43.x

解説: $Z \rightarrow Z/2Z$ を自然な射影とする。 $1 \in Z$ は位数無限だが、その像の位数は2である。

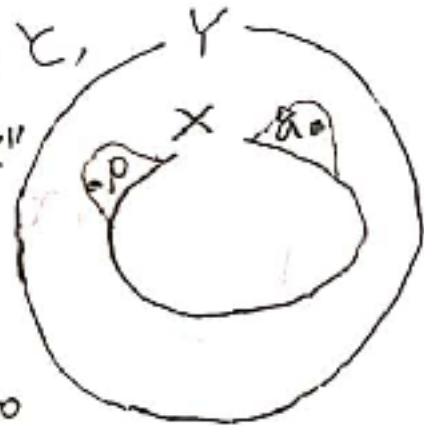
コメント：単射群準同型なら位数を保つ。

44.x

コメント：ハウスドルフ性を課せばすぐコンパクトであることがわかりますが、ハウスドルフとは限らない場合は反例があります。

解説：

(X, \mathcal{O}) をコンパクトでない位相空間とする。
 $Y = X \cup \{p\} \cup \{q\}$ とし、 $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup Y$ とすると、
 (Y, \mathcal{O}') は位相空間になる(示せ)。
 $P = X \cup \{p\}$, $Q = X \cup \{q\}$ とすると、
 P, Q はともに Y の相対位相で
 コンパクトな Y の部分空間
 になる(示せ)。このとき
 $P \cap Q = X$ はコンパクトでない。



コンパクトでない空間に1点集合を加えてコンパクト化する、という話を応用して作った例です。
 (示せ)と書いてある2つは位相空間を習った後の練習問題にちょうど良い問題です。やって見てください。

45.○

解説：純非分離拡大の1つの例を与える命題です。たとえば雪江先生の青雪江のp182の命題3.3.27に載っています。

コメント：使い道としては、たとえば「smooth curveの間の写像は、必ずフロベニウス写像と分離写像に分解する」という有用な事実があり、本問題の主張はその証明において本質的です。

Cor 2.17. $\text{ch } k = p$ $C_1/k, C_2/k$: smooth curve,

$\psi: C_1 \rightarrow C_2$: map is,

$C_1 \xrightarrow{\phi} C_1^{(q)} \xrightarrow{\lambda} C_2$ と分解する.

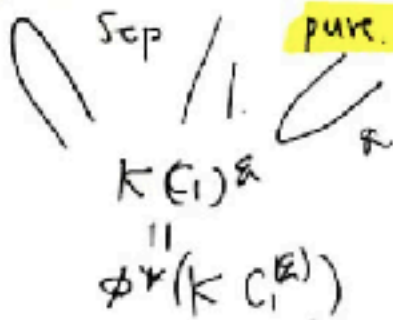
($q := \deg_i(\psi)$, ϕ : Frobenius, λ : Sep)

pf. $\psi^*: k(C_2) \hookrightarrow k(C_1)$

$\psi^* k(C_2) \subset k(C_1)$

\downarrow $k(C_1)$ における $\psi^* k(C_2)$ の分離閉包 B をとる

$\psi^* k(C_2) \subset B \subset k(C_1)$



$\rightarrow \psi^* k(C_2) \subset k(C_1^q) \subset k(C_1)$

同様に $\psi: C_1 \xrightarrow{\phi} C_1^{(q)} \xrightarrow{\lambda} C_2$ を与える

(命題の出典: Silverman 'the arithmetic of elliptic curves')

46. x

解説: x^3-3 の \mathbb{Q} 上のガロア群を考えるとこれは S_3 になり非可換である。

コメント: 面白いので、アーベル拡大ではない不分岐拡大の例を考えてみてください。

47.x

解説：離散距離空間 X において、 $x \in X$ 中心半径1の閉球は X 全体だが、半径1の開球の閉包は $\{x\}$ 。 X が2元以上のときこれらは一致しない。

もう少し面白い例を出そう。半径1の開球 $Z_p x = Z_p - pZ_p$ はclopenだから、閉包は $Z_p x$ のままで、半径1の閉球 Z_p とは一致しない！

48.○

解説：次のような例があります。なので、無限次元拡大の時は、部分群にクルル位相という位相を入れて、閉部分群との対応を作ります。

無限次元拡大だとガロア理論の基本定理（ガロア対応）が成り立たない反例：

$\text{Gal}(F_p^n/F_p)$ は Z/nZ と同型でした。

この射影極限をとると、 F_p^n の n を自然数全体で走らせたユニオンが F_p の代数閉包になりますが、これを F とします。前述の同型から得られる逆系に対し、射影極限をとると、

$\text{Gal}(F/F_p)$ と Z^\wedge (Z の副有限完備化)と同型になります。

Z^\wedge は Z を真の部分群として含み、 $\text{Gal}(F/F_p)$ は $\langle \text{Frp} \rangle$ (Frp は p 乗フロベニウス写像)を真の部分群として含みます。今、 $F - F_p$ という体拡大の列に対して $\{1\} - \langle \text{Frp} \rangle - Z^\wedge$ という部分群の列が対応しているので、ガロア対応が成り立つなら、 $\langle \text{Frp} \rangle$ の真の部分群に対応して、 F/F_p の真の非自明な中間体があるはずですが、 $\langle \text{Frp} \rangle$ が固定する F の元は、有限体の特徴付けより F_p になってしまいます。異なる2つの部分群が同じ不変体を持つので、ガロア対応は成立していません。

一般に、任意の体拡大 L/K から $\text{Gal}(L/K)$ の部分群への写像を作るとき、このような反例があるのでwell definedになりません。それで、部分群のうちクルル位相で閉部分群になるものだけを採用すれば、well definedになり、単射性は有限次の場合と同様に、全射性を頑張って示すことで、無限次元の場合もbijと言えます。

49.○

解説：

R : DVR π : uniformizer

$R[x]$ の極大イデアルで $I = (x^2+1)$ を含むものは π を含む。

Proof. $R[x]$ の I を含む極大イデアルは $R[x]/I \cong R[i]$ の極大イデアルと 1対1に対応する。

$R[i]$ の極大イデアルを求めよう。

ここで, $i: R \rightarrow R[i]$ という写像を考える。

$R[i] \supset R$ は, (i が $x^2+1=0$ という $R[x]$ の monic 多項式の根だから) 整拡大である。

よって, $R[i]$ の素イデアル \mathfrak{q} が極大である

$\Leftrightarrow i^{-1}(\mathfrak{q})$ が R の極大イデアル

今, R は π を唯一の極大イデアルとある

局所環だから, $i^{-1}(\mathfrak{q}) = (\pi)$ 。

よって, $\pi \in i^{-1}(\mathfrak{q})$ より $\pi \in \mathfrak{q}$ がわかる。

$R[i] \rightarrow R[x]/(x^2+1)$

\downarrow \downarrow
 $a+bi \mapsto a+bx \pmod{x^2+1}$

$\pi \in R[i]$ は $\pi \pmod{x^2+1} \in R[x]/(x^2+1)$ になる。

よって $R[x]/I$ の極大イデアルは $\pi \pmod{I}$ を含む。よって $R[x]$ の I を含む極大イデアルは π を含む。 \square

コメント: イデアル対応と整拡大を使って議論します。

50.x

解説: $(\pi x - 1)$ は $R[x]$ の極大イデアルですが, π を含みません。

コメント:

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

「整数係数の n 変数多項式環の極大イデアルは必ず素数を含む。」という事実があります。係数環がDVRだとこの類似は成り立たない、という問題です。49は、極大イデアルに少し条件を付け加えると、含むようにできる、という問題です。 (x^2+1) が特別というわけではなく、モニツクな多項式ならなんでも大丈夫です。

Pomb 数学研究会 大学数学仮免学科

あとがき

教習所の学科試験にインスピレーションを受けて数学版を作ろうと思い立ち、皆様のご協力を得て製作することができました。

味気ない事実の羅列の中に、少しでも背景を覗ける機会があれば、と思って少し背景の説明に当たるコメントを充実させました。

なお、筆者の最近の趣味で局所類体論を背景とした問題がいくつか混じてしまいましたがあまり気にしないでください。

何か問題や解説に関して気になることがあったり、「この問題の解説をもっと詳しくして欲しい!」という要望があれば冒頭のメールまで送ってください。

また、解析バージョン、幾何バージョンを今後作っていただける方がいたらとても嬉しいです。

2021年 4月10日 神戸大学数学科 4年生 志賀明日香