[redacted] セミナー

No. 0

Date

§1. p進数の特徴付け

1. $\mathbb{Z}$ のp進モジュールによる完備化

2. べき級数化

3. $\lambda_{m,n}$: $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ $(n \geq m)$ の射影性

4. $\hat{\mathbb{Z}}$ のp成分

§2 Fürstenberg 位相と $\hat{\mathbb{Z}}$

1 Fürstenberg 位相

2. $\hat{\mathbb{Z}}$ との関係

§3 p進数と不定方程式

1. Henselの補題

2. Hasse - Minkuki の定理

§4. p進解析の流り

No. 1

Date . .

§1

1. $\mathbb{Z}$のp進キリによる定義

Def $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ (0でない) に対して、$a = p^n \frac{c}{b}$ ($p \nmid bc$, 互いに素) とかける時

nを、aの素数pに関するオーダーといい、$\mathrm{ord}_p a$とかく

$\mathrm{ord}_p 0 = \infty$ とする。又に、$|a|_p := p^{-\mathrm{ord}_p a}$, $|0|_p := 0$と

する。

Def : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $d_p(x,y) = |x-y|_p$

Prop : $(\mathbb{Q}, d_p)$は、距離空間になる。

proof

(i) $d_p(x,y) = p^{-\mathrm{ord}_p(x-y)} \geq 0$

$d_p(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(ii) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

・$d_p(x,z) = d_p((x-y)+(y-z))$

・$\mathrm{ord}_p\{(x-y)+(y-z)\}$

$\geq \min\{\mathrm{ord}_p(x-y), \mathrm{ord}_p(y-z)\}$ ← ultra metric

・$d_p(x,z) \leq \max\{d_p(x-y), d_p(y-z)\}$

$\leq d_p(x-y) + d_p(y-z)$ //

Claim

・$\mathbb{Q}_5$ の、コーシー列であって、収束しないものが存在する

・例として、

$a_n = 2^{5^n}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を考える

$2^5 \equiv 2 \pmod 5$

$2^{5^2} \equiv 2^5 \pmod{5^2}$

$\vdots$

$2^{5^R} \equiv 2^{5^{R-1}} \pmod{5^R}$

$b = \dfrac{2^{5^R} - 2^{5^{R-1}}}{5^R} \in \mathbb{Z}$ で、

$a_m = 2 + \sum_{R=1}^{m} b \cdot 5^R$ は、コーシー列

☺

$\forall n \geq m$ に対し

$$v_5(a_n - a_m) = v_5\left(\sum_{R=m}^{n} b \cdot 5^R\right) \geq 5^m \xrightarrow{m \to \infty} \infty$$

収束先 α に対応

$a_{n+1} = a_n^5$

$\alpha = \alpha^5$

$\alpha \equiv 2 \pmod 5$ より

$\alpha^4 = 1$

$\therefore \alpha = \pm 1$ ・矛盾 //

Def 1

・$\mathbb{Q}$ の p 進付値による完備化を $\mathbb{Q}_p$ (p 進数体)

・$\mathbb{Z}$ の p 進付値による完備化を $\mathbb{Z}_p$ (p 進整数) と def

Prop

・$\mathbb{Z}_p$ は、Top ring (位相環)、$\mathbb{Q}_p$ は、Top fld (位相体)

proof

・Top (位相) は より。

・$x+y := \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$

$xy := \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$

と def すれば ring の公理をみたす

・演算の連続性については、$x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$ のとき

$x_n+y_n \longrightarrow x+y$ を示せばよい。

$\forall \varepsilon > 0$、$\exists N$、$n \geq N$、$|x_n - x|_p < \varepsilon$, $|y_n - y|_p < \varepsilon$ の時.

$|(x_n+y_n)-(x+y)|_p = |(x_n-x)+(y_n-y)|_p \leq \max\{|x_n-x|_p, |y_n-y|_p\} = \varepsilon$

→ 積についても同様.

Remark、$\mathbb{Z}_p$ の基底は何か？

$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x-a|_p < \varepsilon\}$

$|x-a|_p \leq \varepsilon = p^{-e}$ $(e \in \mathbb{Z})$

$\therefore p^{-\mathrm{ord}_p(x-a)} \leq p^{-e}$

$\therefore \mathrm{ord}_p(x-a) \geq e$

$x-a \in p^e \mathbb{Z}_p$

$\therefore x \in a + p^e \mathbb{Z}_p$

よって、$a+p^e\mathbb{Z}_p \ (e \geq 0)$ が 基点 の b.

2. べき表記

・$\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\} \subset \mathbb{Z}_p$ はまい

・更に、$\forall a \in \mathbb{Z}_p$, $\exists!\ a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{F}_p$, $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$

(⟶ 位取)

・Def 2.

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$$

$$\mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$$

不負

Th. $\mathbb{Z}_p$ で

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する $\iff \lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$

$\left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{ord}_p a_n = \infty \right)$

proof

($\Rightarrow$) 部分和

$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ とすると

$|a_n|_p = |S_n - S_{n-1}|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

($\Leftarrow$) $m \geq n$

$\mathrm{ord}_p(S_m - S_n) = \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=n}^{m} a_i\right)$

ultra $\rightsquigarrow \geq \min\{\mathrm{ord}_p a_m, \cdots, \mathrm{ord}_p a_n\}$

$\xrightarrow{n\to\infty} \infty$

3. 射影極限

$f = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + \quad \in \mathbb{Z}_p$ に対し

$\overline{S_1} \equiv a_0 \pmod{p}$

$\overline{S_2} \equiv a_0 + a_1 p \pmod{p^2}$

剰余類の列

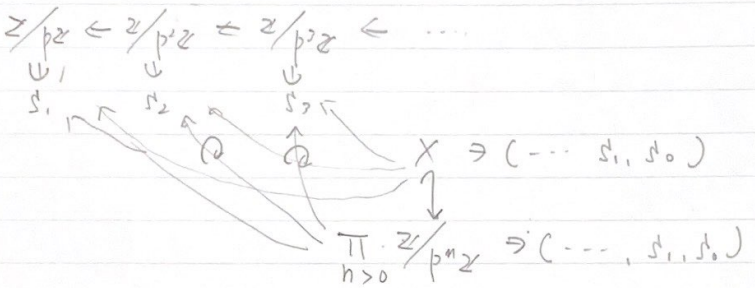
$\vdots$

と対応 $(\overline{S_1}, \overline{S_2}, \cdots) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \cdots$

かこれ、 $s_{m+1} \equiv s_m \pmod{p^m}$ が成立

$\lambda_{m,n} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ $(n \geq m)$ に対し、

図式 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \leftarrow \cdots$ に対し、
次の図式を可換にするような X.



すなわち、

$$X = \left\{ (x_m) \in \prod_{m>0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \;\middle|\; \lambda_{m,n}(x_n) = x_m \ (n \geq m) \right\}$$ と定める。

これと、$\mathbb{Z}_p$ と同一視する。

Def 3.

図 Top ring における図式 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \leftarrow \cdots$ の
極限を $\mathbb{Z}_p$ と def する

∴ $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ には、離散位相 さえ入れている.

$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は、有限集合なので、ハウスドルフかつ コンパクト.

∴ $\prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ も、ハウスドルフ かつ コンパクト。

ここで、$Y = \left\{ (x_n) \in \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \;\middle|\; \lambda_{m,n} \circ p_m(x_m) = p_n(x_m) \right\}$ $(m \geq n)$

さ示すことで、 $X = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とおく $\quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ ↺ Y

$X = \bigcap_{m \geq n} Y$

lem.

$X, Y = \mathrm{Top}$ 、 Y. ハウスドルフ

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$: conti (連続)

$eq(f,g) = \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ is closed

↑ イコライザー

∴ lem より、 Y is closed 、 よって. X は. closed.

∴ $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が、ハウスドルフ かつ コンパクト より、

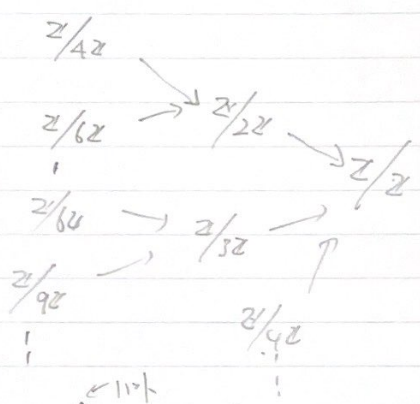
X は、ハウスドルフ. かつ. コンパクト。

$\| \mathbb{Z}_p$

4、・さらに、$\mathbb{Z}_p$は、完全不連結(連結成分が1点集合のみ)

・Def：位相群 G が、ハウスドルフかつコンパクトかつ全不連結の時、Gを副有限群という。

・Def：圏 Top.Grp における $\lambda_{m,n}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $(m|n)$ からなる図式



の極限を、$\hat{\mathbb{Z}}$ と def する。(←リミット)

・$\hat{\mathbb{Z}}$は、副有限群であり、$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$の副有限完備化($m\mathbb{Z}$は、$\mathbb{Z}$の指数有限な正規部分群全体をわたる)という。

・$\forall m \in \mathbb{N}$, $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots$ (素因数分解)とすると

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \times \cdots$$

↑ 中国剰余定理

∴ $\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \varprojlim \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \times \cdots\cdots$

∴ $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}_p$

・Def 4 :
$\hat{\mathbb{Z}}$ の p 成分を $\mathbb{Z}_p$ と def する

---

§2 (F)urstemberg 位相と $\hat{\mathbb{Z}}$

・Def

・$a, b \in \mathbb{Z}$

・$N_{a,b} := \{a + bm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ を基底にもつ Top (位相) が存在し、

それを (F) 位相という。

・Th. 素数は、無限にある。

proof

・$\{\pm 1\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_p p\mathbb{Z}$

・$\{\pm 1\}$ は、有限集合なので、open ではない。

よって、$\bigcup_p p\mathbb{Z}$ は、closed ではない。

・ここで、$p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} N_{i,p}$ より、$p\mathbb{Z}$ は、closed.

(↑ $p\mathbb{Z}$: pの倍数) (mod p で 0〜p−1)

素数が、有限ことすると、$\bigcup_p p\mathbb{Z}$ is closed となり矛盾。

No.

Date

2、 $\hat{\mathbb{Z}}$ との関係

今日の目標は、以を示すこと。

Claim : 下位相は、$\hat{\mathbb{Z}}$ の位相さ $\mathbb{Z}$ に同等してもの.

- $\hat{\mathbb{Z}} \subset \prod_p \mathbb{Z}_p$

$\prod_p \mathbb{Z}_p$ の基底を知りたい.

、$\mathbb{Z}_p$ の基底として、$a_i + p_i^{e_i}\mathbb{Z}_p$ ($a_i \in \mathbb{Z}_p$, $e_i \geq 0$) かとれるので、

$\prod_p \mathbb{Z}_p$ の基底は、$(a_1 + p_1^{e_1}\mathbb{Z}_{p_1}) \times (a_2 + p_2^{e_2}\mathbb{Z}_{p_2}) \times \cdots$

$\cdots \times (a_m + p_m^{e_m}\mathbb{Z}_p) \times \prod_{i \neq 1,2,\cdots,m} \mathbb{Z}_{p_i}$ ——①

- 中国剰余定理から、$\exists a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a_j \pmod{p_i^{e_i}\mathbb{Z}_{p_i}}$ $i = 1, \cdots, n$

①は、$a + p_1^{e_1}\mathbb{Z}_{p_1} \times p_2^{e_2}\mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times p_n^{e_n}\mathbb{Z}_{p_n} \times \prod_{i \neq 1,\cdots,n} \mathbb{Z}_{p_i}$

、ここで、$b = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ とおけば、

$\prod_p \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Z}$ の基底は、$\{a + bn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ となる.

§3. p進数と不定方程式

・問題

(1) p：奇素数、$\exists x, y \in \mathbb{Q}$、$p = x^2 + y^2$ となる p の条件は？

(2) $\underbrace{11\cdots1}_{m\text{こ}}$ が、3で割れれば割り切れる数

$=$（各位の和が3で割り切れる数）

1. Hensel の補題

Th. ・$F(x)$：$\mathbb{Z}_p$ 上の多項式

・$\exists x_0 \in \mathbb{Z}_p$、$\delta_1 = \mathrm{ord}_p(F(x_0))$、$\delta_2 = \mathrm{ord}_p(F'(x_0))$、

$\delta_1 > 2\delta_2 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_p$、$F(x)=0$、$x \equiv x_0 \pmod{p^{\delta_1 - \delta_2}}$

Cor (証)

$\exists x_0 \in \mathbb{Z}$、$F(x_0) \equiv 0 \pmod p$、$F'(x_0) \not\equiv 0 \pmod p$（微分）

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_p$、$F(x)=0$

$a \in \mathbb{Q}_p$、$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n$ のとき、$a = [\cdots \quad a_{m-1} a_m]_{(p)}$

例]

・$\forall m \in \mathbb{N}$、$x^2+1 \equiv 0 \pmod{5^m}$ は解をもつか？

・$\mathbb{Z}_5$ で、$x^2+1=0$ の解があれば、仮定

$x = [\cdots \quad a_2 a_1 a_0]_{(5)}$ とおく

$[\cdots a_1 a_1 a_0]_{(5)}^2 = -1$

No.

Date

・ $a_0^2 \equiv 4 \pmod 5$

$(5a_1 + a_0)^2 \equiv 4 \pmod{5^2}$

⋮

と、帰納的にできる。

$x_0 = 2$ とおく。 $f(x) = x^2 + 1$ $(f'(x) = 2x)$

$f(2) = 5 \equiv 0 \pmod 5$, $f'(2) = 4 \not\equiv 0 \pmod 5$

⟶ Hensel より $x^2 + 1 = 0$ は $\mathbb{Z}_5$ で解ける。

(この包含関係: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ は定義化)

proof.

$x_i \in \mathbb{Z}_p$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し、

(i) $\mathrm{ord}_p(f'(x_i)) = \delta_2$, (ii) $f(x_i) \equiv 0 \pmod{p^{\delta_1 + i - 1}}$

(iii) $x_i \equiv x_{i+1} \pmod{p^{\delta_1 - \delta_2 + i - 1}}$

となるようなものが、構成できたとする。

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (Newton 法) とおく。

$\therefore F(x_{n+1}) = F\left(x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}\right)$

テイラー展開 →

$$= F(x_n) - F'(x_n)\cdot\frac{F(x_n)}{F'(x_n)} + G_n(x)\left(\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}\right)^2$$

となる。$G_n(x)$: $\mathbb{Z}_p$ 上の多項式が存在する。

$$= G_n(x)\left(\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}\right)^2$$

(ii) について

$\mathrm{ord}_p F(x_{n+1}) \geq 2(\delta_1 + n - \delta_2) \geq \delta_1 + n$ より

(ii) は $i = n+1$ でも成立.

∴ (i) (ii) ⟶ 証明

今、$\{x_n\}$ は、コーシー列であり (∵証明)、

$\mathbb{Z}_p$: 完備より、収束先 $x \in \mathbb{Z}_p$ があり、

$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x)$

2、 Hasse-Minkowski の定理 (局所・大域原理) — 2次形式

(準備) ヒルベルト記号 (kの標数が0)

k : field, $\mathrm{ch}\, k = 0$ (標数), $a, b \in k^\times$

$(a,b)_k = 1 \iff \sqrt{a} \in k$ or $\begin{cases} \sqrt{a} \notin k \\ b \in N_{k(\sqrt{a})/k}(k(\sqrt{a})^\times) \end{cases}$

No.

Date

・$(a,b)_K = -1 \iff \sqrt{a} \notin K$ かつ $b \notin N_{K(\sqrt{a})/K}(K(\sqrt{a})^\times)$

・Prop

$(a,b)_K = 1 \iff K$ 上、$ax^2+by^2=1$ が解をもつ

$(a,b)_K = -1 \iff K$ 上、$ax^2+by^2=1$ が解をもたない

Rem

・K/L : 有限次ガロア拡大

・$\alpha \in K$、$N_{K/L}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}_L K} \sigma(\alpha)$

・$N_{K/L}(K^\times) = \{ N_{K/L}(\alpha) \mid \alpha \in K^\times \}$

Rem

$K = \mathbb{Q}_p$、$(a,b)_{\mathbb{Q}_p} = (a,b)_p$ とかく

lem $a, b \in K^\times$

(1) $(a,bc)_K = (a,b)_K (a,c)_K$ (乗法性)

(2) $(a,b)_K = (a,bc^2)_K$

(3) $(a,b)_K = (a,b(a-c^2))_K$

(4) $a, b \in \mathbb{Z}_p^\times$ $\Rightarrow$ $(a,b)_p = 1$

(5) $p \mid a$、$b \in \mathbb{Z}_p^\times$ $\Rightarrow$ $(a,b)_p = \left(\frac{a}{p}\right)$ ← ルジャンドル記号

$\mathbb{Z}_p$ ↓

$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ \sum_{i \geq 0}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq a_i < p \\ a_0 \neq 0 \pmod p \end{array} \right\}$

No. 5

Date

(4) の proof

tact $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, $ax_0^2 + by_0^2 \equiv 1 \pmod{p} \iff p \equiv 1 \mod 4$

$f(x,y) = ax^2 + by^2 - 1$

$y = y_0$ と固定する.

$f(x) = ax^2 + by_0^2 - 1$

$f(x_0) = 0 \mod p$

$f'(x_0) = 2ax_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$

$\longrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_p$, $f(x) = 0$

Hensel の lem

・p: 奇素

$\exists x, y \in \mathbb{Z}$, $p = x^2 + y^2$

記号

$a \in \mathbb{Z}_p^{\times}$

$(-1)(-p)$

$(p, pa)_p = (p, p)_p (p, a)_p$

$= (-1, p)_p \underbrace{(-p, p)_p}_{1} (p, a)_p$

$= \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)$

$= \begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) & p \equiv 1 \mod 4 \\ -\left(\frac{a}{p}\right) & p \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$

No.

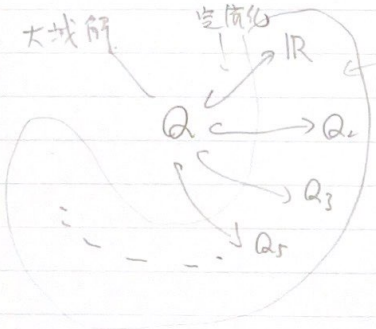
Date

2. 局所大域原理

Th.

$(a,b)_K = 1 \iff (a,b)_{\mathbb{R}} = 1$ 、 $(a,b)_p = 1$

p: 任意の素数



例.

$\exists x, y \in \mathbb{Q}$、 $p = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = p \iff \frac{1}{p}x^2 + \frac{1}{p}y^2 = 1$

$(\frac{1}{p}, \frac{1}{p})_{\mathbb{Q}} = \underbrace{(p,p)_{\mathbb{Q}}}_{\text{大域}}$

$\underbrace{(p,p)_{\mathbb{R}}}_{1}$、 $\underbrace{(p,p)_2}_{1}$ $(p,p)_p$ 、 $\underbrace{(p,p)_q}_{1}$ (pと異なる素数)

$(p,p)_p$ を調べれば良い.

Proof

略

§4. p進解析の祖り

$\mathbb{R}$上では、e^x、$\log x$があって、$\mathbb{R}$(あるいは$\mathbb{Q}$)と
$\mathbb{R}_{>0}$(あるいは$\mathbb{Q}$)との間に、$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{同型}} \mathbb{R}_{>0}$ があった

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}_{>0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & e^x \\ \log t & \longleftarrow\!\shortmid & t+1 \end{array}$$

・$\mathbb{Q}_p$上でも、同じような同型がある

- Def.

$x \in \mathbb{Q}_p$

$$\cdot \exp_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

- Prop

・$\exp_p(x)$が収束 $\Leftrightarrow x \in p\mathbb{Z}_p$

・$\log_p(x)$ 〃 $\Leftrightarrow x \in 1+p\mathbb{Z}_p$

prop

$p^n\mathbb{Z}_p$ (あるいは$\mathbb{Q}$) $\simeq$ $1+p^n\mathbb{Z}_p$ (あるいは$\mathbb{Q}$)

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & \exp_p(x) \\ \log t & \longleftarrow\!\shortmid & t+1 \end{array}$$

No.

Date

(1)

$10 \in 1+9\mathbb{Z}_3$, $10 \notin 1+27\mathbb{Z}_3$

$\therefore \log_3(10) \in 9\mathbb{Z}_3$, $\log_3(10) \in 27\mathbb{Z}_3$

$\therefore n\log_3(10) \in 3^{2+\mathrm{ord}_3 n}\cdot\mathbb{Z}_3$, $n\log_3(10) \notin 3^{3+\mathrm{ord}_3 n}\mathbb{Z}_3$

$\therefore \log_3(10^n) \in 3^{2+\mathrm{ord}_3 n}\mathbb{Z}_3$, $\log_3(10^n) \notin 3^{3+\mathrm{ord}_3 n}\mathbb{Z}_3$

$\therefore 10^n - 1 \in 3^{2+\mathrm{ord}_3 n}\mathbb{Z}_3$, $10^n - 1 \notin 3^{3+\mathrm{ord}_3 n}\mathbb{Z}_3$

$\therefore \mathrm{ord}_3(10^n-1) = 2 + \mathrm{ord}_3 n$

$\therefore \mathrm{ord}_3\left(\frac{10^n-1}{9}\right) = \mathrm{ord}_3 n$